परिशिष्ट 1

गणित में उपपत्तियाँ (Proofs in Mathematics)

❖*Proofs are to Mathematics what calligraphy is to poetry. Mathematical works do consist of proofs just as poems do consist of characters*
— VLADIMIR ARNOLD ❖

A.1.1 भूमिका (Introduction)

कक्षा IX, X तथा XI में हम कथन, संयुक्त कथन, कथन के निषेधन, विलोम तथा प्रतिधनात्मक स्वरूप और अभिगृहीत, अनुमानित कथन, साध्य तथा निगमनात्मक विवेचन की संकल्पनाओं के बारे में पढ़ चुके हैं।

यहाँ हम गणितीय साध्यों को सिद्ध (प्रमाणित) करने की विभिन्न विधियों पर विचार करेंगे।

A.1.2 उपपत्ति क्या है? (What is a Proof?)

किसी गणितीय कथन की उपपत्ति में कथनों का एक अनुक्रम अंतर्विष्ट होता है, जिसके प्रत्येक कथन के औचित्य को किसी परिभाषित पद या किसी अभिगृहीत या किसी ऐसी साध्य द्वारा प्रमाणित करते हैं, जिसे निगमनिक विधि तथा कुछ अपरिभाषित पदों द्वारा केवल स्वीकार्य तार्किक नियमों का प्रयोग करके पूर्व प्रतिपादित किया जा चुका हो।

इस प्रकार प्रत्येक उपपत्ति निगमनिक तर्कों की एक शृंखला होती है, जिनमें से प्रत्येक की अपनी परिकल्पनाएँ तथा निष्कर्ष होते हैं। अधिकतर हम किसी साध्य को उसमें दिए हुए तथ्यों से प्रत्यक्ष रीति द्वारा सिद्ध करते हैं। परंतु कभी-कभी साध्य को सीधे सिद्ध करने की अपेक्षा उसके समतुल्य साध्य को सिद्ध करना आसान होता है। इस प्रकार किसी साध्य को सिद्ध करने की दो विधियाँ प्रदर्शित होती हैं, नामत: प्रत्यक्ष उपपत्ति अथवा अप्रत्यक्ष उपपत्ति तथा इसके अतिरिक्त प्रत्येक विधि में तीन भिन्न-भिन्न तरीके होते हैं, जिनकी चर्चा नीचे की गई है।

प्रत्यक्ष उपपत्ति यह साध्य की वह उपपत्ति है, जिसे हम सीधे रुप में प्रदत्त तथ्यों से प्रारंभ कर साध्य की उपपत्ति स्थापित करते हैं।

(i) **सीधा-सीधा उपगमन (Approach)** यह तर्कों की एक शृंखला है, जो प्रदत्त अथवा कल्पित तथ्यों से सीधे प्रारंभ करके, अभिगृहीतों, परिभाषित पदों तथा पूर्व प्रमाणित साध्यों की सहायता से तर्क के नियमों के प्रयोग द्वारा, सिद्ध किए जाने वाले निष्कर्ष को प्रमाणित करती है।

निम्नलिखित उदाहरण पर विचार कीजिए:

उदाहरण 1 यदि $x^2 - 5x + 6 = 0$ तो $x = 3$ या $x = 2$ है।

हल $x^2 - 5x + 6 = 0$ (दिया है)

$\Rightarrow$ $(x - 3)(x - 2) = 0$ (एक व्यंजक को तुल्य व्यंजक से बदलने पर)

$\Rightarrow$ $x - 3 = 0$ या $x - 2 = 0$ (पूर्वप्रमाणित साध्य $ab = 0$ तब $a = 0$ या $b = 0$, $a, b \in \mathbf{R}$ द्वारा)

$\Rightarrow$ $x - 3 + 3 = 0 + 3$ या $x - 2 + 2 = 0 + 2$ (समीकरण के दोनों पक्षों में समान संख्या जोड़ने से उसकी प्रकृति परिवर्तित नहीं होती है।)

$\Rightarrow$ $x + 0 = 3$ या $x + 0 = 2$ (योग के अंतर्गत पूर्णांक के तत्समक(Identity) गुण के प्रयोग द्वारा)

$\Rightarrow$ $x = 3$ या $x = 2$ (योग के अंतर्गत पूर्णांक के तत्समक गुण के प्रयोग द्वारा।)

$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3$ या $x = 2$

यहाँ p प्रदत्त कथन "$x^2 - 5x + 6 = 0$" है और q निष्कर्ष कथन "$x = 3$ या $x = 2$" है।

कथन p के व्यंजक $x^2 - 5x + 6$ को, इसके तुल्य एक अन्य व्यंजक $(x - 3)(x - 2)$ से प्रतिस्थापित कर के हम एक व्यंजक r: "$(x - 3)(x - 2) = 0$" प्राप्त करते हैं

यहाँ दो प्रश्न उठते हैं:

(i) व्यंजक $(x - 3)(x - 2)$ किस प्रकार व्यंजक $x^2 - 5x + 6$ के समान (तुल्य) है ?

(ii) किसी व्यंजक को उसके समान एक अन्य व्यंजक से हम कैसे प्रतिस्थापित कर सकते हैं ? इनमें से प्रथम को हम पिछली कक्षाओं में गुणनखंड द्वारा सिद्ध कर चुके हैं अर्थात्

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 3x - 2x + 6 = x(x - 3) - 2(x - 3) = (x - 3)(x - 2)$$

द्वितीय प्रश्न तर्क के वैध रूप (तर्क के नियमों) द्वारा संभव होता है।

इसके उपरांत r पूर्वकथन (Premise) या प्रदत्त कथन हो जाता है, जिससे कथन s: "$x - 3 = 0$ या $x - 2 = 0$" प्राप्त होता है। प्रत्येक चरण (steps) का औचित्य कोष्ठक (brackets) में दिया है।

यह प्रक्रिया निरंतर तब तक चलती रहती है जब तक हम अंतिम निष्कर्ष पर नहीं पहुँच जाते हैं।

तर्क की प्रतीकात्मक समतुल्यता निगमन द्वारा यह प्रमाणित करने में है कि $p \Rightarrow q$ सत्य है।

p से प्रारंभ करके निगमन द्वारा $p \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow \ldots \Rightarrow q$ को प्रमाणित कीजिए। अत: "$p \Rightarrow q$" सत्य है।

उदाहरण 2 सिद्ध कीजिए की फलन $f: R \to R$ जो $f(x) = 2x + 5$ द्वारा परिभाषित है, एक एकैकी (one-one) फलन है

उपपत्ति ध्यान दीजिए कि फलन f एकैकी होगा यदि $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

(एकैकी फलन की परिभाषा)

अब मान लीजिए कि $f(x_1) = f(x_2)$ अर्थात् $2x_1 + 5 = 2x_2 + 5$

$\Rightarrow$ $2x_1 + 5 - 5 = 2x_2 + 5 - 5$ (दोनों पक्षों में समान संख्या जोड़ने से)

$\Rightarrow$ $2x_1 + 0 = 2x_2 + 0$

$\Rightarrow$ $2x_1 = 2x_2$ (वास्तविक संख्याओं में योज्य तत्समक का गुण)

$\Rightarrow$ $\frac{2}{2}x_1 = \frac{2}{2}x_2$ (दोनों पक्षों को समान शून्येतर संख्या से विभाजित करने से)

$\Rightarrow$ $x_1 = x_2$

अतः फलन एकैकी है।

(ii) गणितीय आगमन

गणितीय आगमन, साध्यों को सिद्ध करने की एक ऐसी विधि है, जिसका स्वरूप निगमनिक होता है। इस विधि में उपपत्ति पूर्णरूपेण निम्नलिखित अभिगृहीत पर आधारित होती हैं।

N के एक प्रदत्त उपसमुच्चय S में, यदि

(i) प्राकृत संख्या $1 \in S$ तथा

(ii) प्राकृत संख्या $k + 1 \in S$ जब कभी $k \in S$, तो $S = \mathbf{N}$

गणितीय आगमन का सिद्धांत यह है कि यदि एक कथन "$S(n), n = 1$ के लिए सत्य है" (अथवा किसी अन्य प्रारंभिक संख्या j के लिए सत्य है) और यदि कथन $n = k$ के लिए सत्य होने में यह अंतर्निहित है कि वह $n = k + 1$ के लिए अनिवार्यतः सत्य है (जब कभी धन पूर्णांक $k \geq j$), तो प्रदत्त कथन किसी भी धन पूर्णांक n, जहाँ $n \geq j$ के लिए सत्य होता है।

अब हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 3 यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, तो दिखाइए कि $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$

हल मान लिया कि $P(n) : A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$

हम देखते हैं कि $$P(1) : A^1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

अतः P(1) सत्य है।

अब मान लिया कि P(k) सत्य है, अर्थात्

$$P(k) : A^k = \begin{bmatrix} \cos k\,\theta & \sin k\,\theta \\ -\sin k\,\theta & \cos k\,\theta \end{bmatrix}$$

तो हम सिद्ध करना चाहते हैं कि P(k + 1) सत्य है, जब कभी P(k) सत्य है, अर्थात्

$$P(k+1) : A^{k+1} = \begin{bmatrix} \cos(k+1)\,\theta & \sin(k+1)\,\theta \\ -\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\,\theta \end{bmatrix} \text{ सत्य है}$$

पुनः $$A^{k+1} = A^k . A$$

चूँकि P(k) सत्य है, इसलिए

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} \cos k\,\theta & \sin k\,\theta \\ -\sin k\,\theta & \cos k\,\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos k\,\theta\cos\theta - \sin k\,\theta\sin\theta & \cos k\,\theta\sin\theta + \sin k\,\theta\cos\theta \\ -\sin k\,\theta\cos\theta - \cos k\,\theta\sin\theta & -\sin k\,\theta\sin\theta + \cos k\,\theta\cos\theta \end{bmatrix}$$

(आव्यूह गुणन द्वारा)

$$= \begin{bmatrix} \cos(k+1)\,\theta & \sin(k+1)\,\theta \\ -\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\,\theta \end{bmatrix}$$

अतः P(k + 1) सत्य है, जब कभी P(k) सत्य है।

अतएव P(n), n के सभी मानों (धन पूर्णांक) के लिए सत्य है।

(iii) विभिन्न स्थितियों में विखंडन द्वारा अथवा निःशेषण द्वारा उपपत्ति

कथन $p \Rightarrow q$ को सिद्ध करने की यह विधि केवल तभी संभव है, जब p को अनेक कथनों r, s, t (मान लिया) में विखंडित किया जा सकता हो जैसा कि $p = r \vee s \vee t$ (जहाँ "$\vee$" प्रतीक है "या" के लिए)

यदि सप्रतिबंध कथनों $r \Rightarrow q$;

$s \Rightarrow q$;

तथा $t \Rightarrow q$

को प्रमाणित किया जाए, तो $(r \vee s \vee t) \Rightarrow q$, सिद्ध हो जाता है और इस प्रकार $p \Rightarrow q$ प्रमाणित होता है।

इस विधि में परिकल्पना की प्रत्येक संभव दशा को जाँचा जाता है। यह विधि व्यावहारिक रूप से केवल तभी सुविधाजनक है जब विखण्डन द्वारा प्राप्त कथनों की संख्या कम हो।

उदाहरण 4 किसी त्रिभुज ABC, में सिद्ध कीजिए कि

$$a = b \cos C + c \cos B$$

हल मान लीजिए कि p कथन "ABC एक त्रिभुज है " तथा q कथन

"$a = b \cos C + c \cos B$" है

मान लीजिए कि ABC एक त्रिभुज है। शीर्ष A से BC (आवश्यकतानुसार बढ़ाई गई) पर लंब AD खींचिए।

हमें ज्ञात है कि एक त्रिभुज या तो न्यूनकोण त्रिभुज या अधिककोण त्रिभुज या समकोण त्रिभुज होता है, इसलिए हम p को r, s तथा t में विखण्डित कर सकते हैं, जहाँ

r : ABC एक न्यूनकोण त्रिभुज है, जिसमें $\angle C$ न्यूनकोण हैं।

s : ABC एक अधिककोण त्रिभुज है, जिसमें $\angle C$ अधिककोण है।

t : ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें $\angle C$ समकोण है।

अत: हम साध्य को उपर्युक्त तीनों संभावनाओं के लिए अलग-अलग सिद्ध करते हैं।

दशा (i) जब $\angle A, \angle B$, तथा $\angle C$ तीनों ही न्यूनकोण हैं (आकृति A1.1)

समकोण त्रिभुज ADB, द्वारा

$$\frac{BD}{AB} = \cos B$$

अर्थात् $\quad BD = AB \cos B = c \cos B$

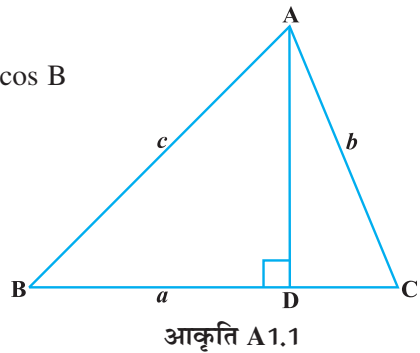
समकोण त्रिभुज ADC द्वारा

$$\frac{CD}{AC} = \cos C$$

अर्थात् $\quad CD = AC \cos C$

$$= b \cos C$$

अब $\quad a = BD + CD$

$$= c \cos B + b \cos C \quad \ldots (1)$$

आकृति A1.1

दशा (ii) जब $\angle C$ अधिककोण है (आकृति A1.2)

समकोण त्रिभुज ADB द्वारा

$$\frac{BD}{AB} = \cos B$$

अर्थात् $BD = AB \cos B$

$= c \cos B$

समकोण त्रिभुज ADC द्वारा

$$\frac{CD}{AC} = \cos \angle ACD$$

$= \cos (180 - C)$

$= -\cos C$

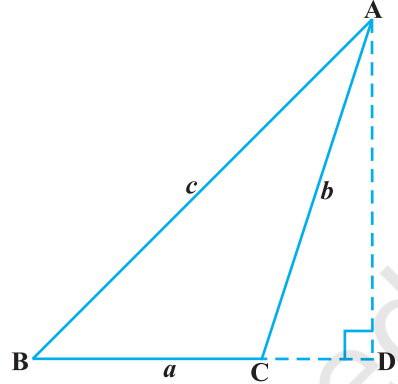
अर्थात् $CD = -AC \cos C$

$= -b \cos C$

अब $a = BC = BD - CD$

अर्थात् $a = c \cos B - (-b \cos C)$

$a = c \cos B + b \cos C$ ... (2)

A
c
b
B
a
C
D

आकृति A1.2

दशा (iii) जब $\angle C$ समकोण है (आकृति A1.3)

त्रिभुज ACB, द्वारा

$$\frac{BC}{AB} = \cos B$$

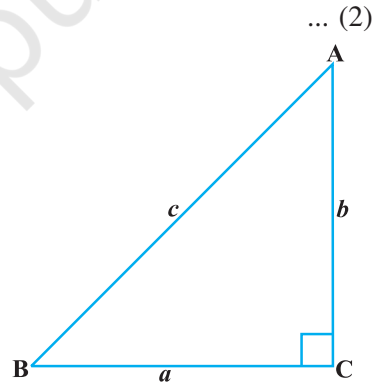
अर्थात् $BC = AB \cos B$

तथा $a = c \cos B$,

$b \cos C = b \cos 90^0 = 0$

अतः हम लिख सकते हैं $a = 0 + c \cos B$

$= b \cos C + c \cos B$ ... (3)

A
c
b
B
a
C

आकृति A1.3

समीकरण (1), (2) तथा (3) से हम पाते हैं, कि किसी त्रिभुज ABC में

$$a = b \cos C + c \cos B$$

दशा (i) से $r \Rightarrow q$ प्रमाणित है।

दशा (ii) से $s \Rightarrow q$ प्रमाणित है।

तथा **दशा (iii)** से $t \Rightarrow q$ प्रमाणित है।

अतः $(r \vee s \vee t) \Rightarrow q$ प्रमाणित है अर्थात् $p \Rightarrow q$ प्रमाणित है,

अप्रत्यक्ष उपपत्तिः दिए गए साध्य को सीधे प्रमाणित करने के एवज में, हम उसके समतुल्य किसी साध्य को सिद्ध करके, प्रदत्त साध्य को प्रमाणित करते हैं

(i) विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति (***Reductio Ad Absurdum***):
यहाँ हम इस मान्यता से प्रारंभ करते हैं कि परिकल्पना सत्य है तथा निष्कर्ष असत्य है। तर्क के नियमों के प्रयोग द्वारा हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि एक ज्ञात सत्य कथन, असत्य है, जो एक विरोधोक्ति है। अतः प्रदत्त कथन सत्य है इस विधि को एक उदाहरण द्वारा समझते हैं।

उदाहरण 5 सभी अभाज्य संख्याओं का समुच्चय अपरिमित (Infinite) होता है।

हल मान लीजिए कि समस्त अभाज्य संख्याओं (Prime Numbers) का समुच्चय P है जो अपरिमित है। हम इस कथन के निषेध (Negation) को, अर्थात समस्त अभाज्य संख्याओं का समुच्चय अपरिमित नहीं है, सत्य मान लेते हैं, अर्थात् समस्त अभाज्य संख्याओं का समुच्चय परिमित है। इसलिए हम समस्त अभाज्य संख्याओं को सूचीबद्ध कर सकते हैं। मान लीजिए कि $P_1, P_2, P_3, ..., P_k$ समस्त अभाज्य संख्याओं की सूची है। अब मान लीजिए

$$N = (P_1 P_2 P_3 \ldots P_k) + 1 \qquad \ldots (1)$$

स्पष्ट है कि N अभाज्य संख्याओं की सूची में नहीं है, क्योंकि यह सूची की किसी भी संख्या से अधिक है।

N या तो अभाज्य संख्या है या संयुक्त संख्या है।

यदि N अभाज्य संख्या है तो (1) से स्पष्ट होता है कि एक ऐसी अभाज्य संख्या का अस्तित्व है, जो सूची में नहीं है।

दूसरी ओर, यदि N एक संयुक्त संख्या है, तो इसका कम से कम एक अभाज्य भाजक (Divisor) होना चाहिए। परंतु सूची की कोई भी संख्या N को विभाजित (पूर्णरूप से) नहीं कर सकती है, क्योंकि उनमें से किसी के द्वारा N को विभाजित करने पर शेषफल सदैव 1 बचता है। अतः N का अभाज्य भाजक सूची के अतिरिक्त कोई अन्य संख्या है।

किंतु यह, इस कथन का कि हमने सभी अभाज्य संख्याओं की सूची बना ली है, विरोधोक्ति है।

इस प्रकार हमारी पूर्वधारणा कि सभी अभाज्य संख्याओं का समुच्चय परिमित है, असत्य है।

अतः सभी अभाज्य संख्याओं का समुच्चय अपरिमित होता है।

टिप्पणी (ध्यान दीजिए कि उपर्युक्त उपपत्ति में विभिन्न दशाओं में विखण्डन द्वारा उपपत्ति की विधि का उपयोग भी है)

(ii) प्रदत्त कथन का प्रतिधनात्मक (contrapositive) कथन के प्रयोग द्वारा उपपत्तिः
यहाँ सप्रतिबंध कथन $p \Rightarrow q$ को सिद्ध करने के स्थान पर हम उसके समतुल्य कथन $\sim q \Rightarrow \sim p$ को सिद्ध करते हैं। (विद्यार्थी समतुल्यता को सत्यापित कर सकते हैं)।

किसी दिए हुए सप्रतिबंध कथन के निष्कर्ष तथा परिकल्पना का विनिमय करके उनमें से प्रत्येक का निषेधन करने से प्रदत्त कथन का प्रतिधनात्मक कथन बनता है।

उदाहरण 6 सिद्ध कीजिए कि $f(x) = 2x + 5$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ एकैकी फलन है।

हल फलन एकैकी होता है, यदि $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

इसका प्रयोग करके हमें प्रमाणित करना है कि "$2x_1 + 5 = 2x_2 + 5$" $\Rightarrow$ "$x_1 = x_2$" यह $p \Rightarrow q$, के रूप का है, जहाँ $2x_1 + 5 = 2x_2 + 5$ कथन p है तथा $x_1 = x_2$ कथन q है। इस बात को हम उदाहरण 2 में "प्रत्यक्ष विधि" द्वारा सिद्ध कर चुके हैं।

हम इसे प्रदत्त कथन के प्रतिधनात्मक कथन के प्रयोग द्वारा भी प्रमाणित कर सकते हैं। दिए गए कथन का प्रतिधनात्मक कथन $\sim q \Rightarrow \sim p$ है, अर्थात् "यदि $f(x_1) = f(x_2)$ तो $x_1 = x_2$" का प्रतिधनात्मक है "यदि $x_1 \neq x_2$ तो $f(x_1) \neq f(x_2)$"

अब $$x_1 \neq x_2$$

$\Rightarrow$ $$2x_1 \neq 2x_2$$

$\Rightarrow$ $$2x_1 + 5 \neq 2x_2 + 5$$

$\Rightarrow$ $$f(x_1) \neq f(x_2).$$

क्योंकि "$\sim q \Rightarrow \sim p$", और "$p \Rightarrow q$" समतुल्य है, इस प्रकार उपपत्ति पूर्ण है।

उदाहरण 7 प्रमाणित कीजिए कि "यदि आव्यूह A, Invertible है, तो A, Non-singular है"

हल उपर्युक्त कथन को प्रतीकात्मक रूप में लिखने पर $p \Rightarrow q$ जहाँ p कथन "आव्यूह A, invertible है" तथा q कथन "A, non-singular है।"

प्रदत्त कथन को प्रमाणित करने के एवज में हम इसके प्रतिधनात्मक कथन को प्रमाणित करते हैं, अर्थात् यदि A एक non-singular आव्यूह नहीं है, तो आव्यूह A invertible नहीं है।

यदि A एक non-singular आव्यूह नहीं है तो इसका अर्थ हुआ $|A| = 0$ है।

अब $$A^{-1} = \frac{adj\ A}{|A|}$$ का अस्तित्व नहीं है, क्योंकि $|A| = 0$

अतः A, Invertible नहीं है।

इस प्रकार हमने यह प्रमाणित कर दिया कि यदि A एक non-singular आव्यूह नहीं है तो A, invertible नहीं है। अर्थात् $\sim q \Rightarrow \sim p$.

अतः यदि एक आव्यूह A invertible है, तो A non-singular है।

(iii) प्रत्युदाहरण (counter example) द्वारा उपपत्तिः

गणित के इतिहास में ऐसे अवसर भी आते हैं, जब किसी परिकल्पित व्यापकीकरण की वैध उपपत्ति ज्ञात करने के सभी प्रयास असफल हो जाते हैं और व्यापकीकरण के सत्यमान की अनिश्चितता अनिर्णीत बनी रहती है।

ऐसी स्थिति में यह लाभप्रद है कि, कथन को असत्य सिद्ध करने के लिए, हम एक उदाहरण ढूँढ़ सकें। किसी कथन को अमान्य करने वाला उदाहरण प्रत्युदाहरण कहलाता है।

क्योंकि साध्य $p \Rightarrow q$ का खंडन, साध्य $\sim(p \Rightarrow q)$ की केवल मात्र एक उपपत्ति होता है। अत: यह भी उपपत्ति की एक विधि है।

उदाहरण 8 कथन: प्रत्येक $n \in \mathbf{N}$ के लिए, $(2^{2^n}+1)$ एक अभाज्य संख्या है।

यह कथन निम्नलिखित प्रेक्षणों के आधार पर एक समय सत्य समझा गया था:

$2^{2^1}+1 = 2^2 + 1 = 5$ जो कि एक अभाज्य संख्या है।

$2^{2^2}+1 = 2^4 + 1 = 17$ जो कि अभाज्य संख्या है।

$2^{2^3}+1 = 2^8 + 1 = 257$ जो कि एक अभाज्य है।

यद्यपि, प्रथम दृष्टि में यह व्यापकीकरण सही प्रतीत होता है। अंततोगत्वा यह प्रतिपादित किया गया कि $2^{2^5}+1 = 2^{32}+1 = 4294967297$ एक अभाज्य संख्या नहीं है क्योंकि $4294967297 = 641 \times 6700417$ है। जो दो संख्याओं का गुणनफल है (1 तथा स्वंय के अतिरिक्त) इस प्रकार यह व्यापकीकरण कि "प्रत्येक n के लिए $2^{2^n}+1$ एक अभाज्य संख्या है $\forall\, n \in \mathbf{N}^+$" असत्य है।

मात्र केवल यह एक उदाहरण कि $2^{2^5}+1$ अभाज्य नहीं है, का उदाहरण व्यापकीकरण को खंडित करने के लिए पर्याप्त है।

अत: हमने सिद्ध कर दिया कि कथन "प्रत्येक $n \in \mathbf{N}$ के लिए, $2^{2^n}+1$ एक अभाज्य संख्या है" सत्य नहीं है।

उदाहरण 9 कथन "प्रत्येक संतत फलन अवकलनीय होता है।" पर विचार कीजिए।

उपपत्ति: हम निम्नलिखित फलनों पर विचार करते हैं:

(i) $f(x) = x^2$

(ii) $g(x) = e^x$

(iii) $h(x) = \sin x$

ये सभी फलन x के सभी मानों के लिए संतत हैं। यदि हम अवकलनीयता पर विचार करें तो ये x के सभी मानों के लिए अवकलनीय हैं। यह हमें इस विश्वास के लिए प्रेरित करता है कि कथन "प्रत्येक संतत फलन अवकलनीय होता है" सत्य है। किंतु यदि हम फलन "$\phi(x) = |x|$" की अवकलनीयता की जाँच करें, जो कि संतत है, तो हम देखते हैं कि यह $x = 0$ पर अवकलनीय नहीं है। इसका तात्पर्य यह हुआ कि कथन "प्रत्येक संतत फलन अवकलनीय होता है" असत्य है। फलन "$\phi(x) = |x|$" का केवल यह एक उदाहरण, व्यापकीकरण का खंडन करने के लिए पर्याप्त है। अत: फलन "$\phi(x) = |x|$" को दिए गए कथन अर्थात्, "प्रत्येक सतत फलन अवकलनीय होता है।" के खंडन का प्रत्युदाहरण कहते हैं।